POTENZA ≡ rapidità con cui il lavoro è compiuto

$$\text{POTENZA MEDIA} = \frac{W}{\Delta t}$$

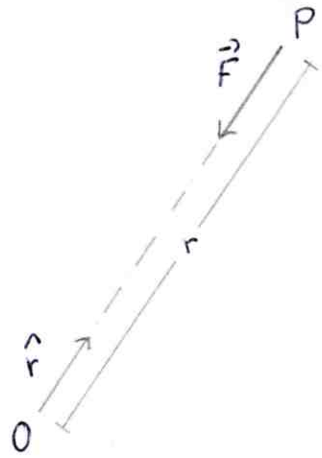
Per una potenza istantanea abbiamo considerato un'espressione infinitesimale:

$$P = \frac{dW}{dt}$$ unità di misura $J/s \equiv W$ - (WATT)

Noi abbiamo espresso il lavoro elementare come $đW = \vec{F} \cdot d\vec{s}$

$$\left.\begin{aligned} đW &= P\,dt \\ đW &= \vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot \vec{v}\,dt \end{aligned}\right\} \quad P = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

FORZE CENTRALI



O ≡ sorgente del campo di forze
Attorno alla regione del punto O è possibile individuare un vettore forza che ha le caratteristiche:

direzione: congiuntamente P con un punto fisso O (sorgente della forza);

modulo: funzione della distanza r di P da O

verso: attrattiva (-) o repulsiva (+).

$$\vec{F} = \pm f(r)\,\hat{r}$$

Esempio: forza gravitazionale: $\vec{F} = -G\,\frac{m_1 m_2}{r^2} \cdot \hat{r}$

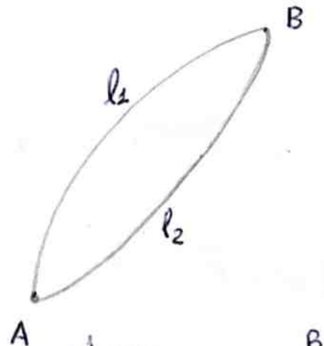
oppure forza elettrica: $\vec{F}_{coulomb} = K \cdot \frac{q_1\ q_2}{r^2} \cdot \hat{r}$

sarà o attrattiva o repulsiva, dipende dal segno delle cariche

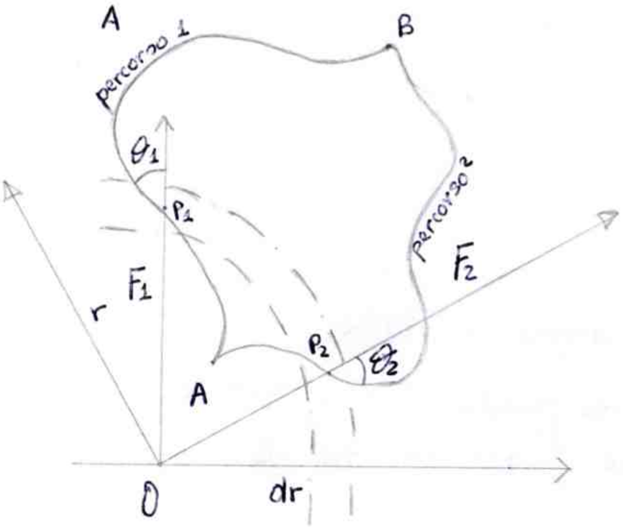
② Le forze centrali sono conservative

Dimostrazione: il lavoro tra due qualsiasi percorsi che connettono A e B è lo stesso.

esempio banale:



$W_{l_1} = W_{l_2}$ dobbiamo dimostrarlo



facendo centro in O tracciamo due circonferenze;

$$\vec{F} = \pm f(r)\,\hat{r}$$

immaginiamo che le due circonferenze siano vicine;

per costruzione P_1 e P_2 sono alla stessa distanza r da O

$$\Downarrow$$

$$|\vec{F_1}| = |\vec{F_2}|$$

$$dW = \vec{F_1} \cdot \vec{dr_1} = F_1\, dr_1 \cos\theta_1$$

$$dW = \vec{F_2} \cdot \vec{dr_2} = F_2\, dr_2 \cos\theta_2$$

$dr_1 \cos\theta_1 \equiv$ proiezione di $\vec{dr_1}$ sulla direzione radiale $= dr$

$dr_2 \cos\theta_2 \equiv$ " " $\vec{dr_2}$ " " " $= dr$

$$\cos\theta_1 = dr_2 \cos\theta_2 = dr$$

$$\Downarrow$$

$$dW_1 = dW_2$$

$$\Downarrow$$

$$W_1 = W_2$$

Il tipo di moto che può avere un corpo soggetto a FORZA CENTRALE:

$$\vec{F} = \pm f(r)\,\hat{r} \quad \text{forza centrale}$$

$O \equiv$ centro di campo di forza centrale

$$\hat{r} = \vec{r} \wedge \vec{F} = \pm f(r)\,\vec{r} \wedge \hat{r} = 0$$

$\vec{\tau} = \dfrac{d\vec{L}}{dt}$ } vale solo se sono valutate sullo stesso polo fisso in un sistema di riferimento inerziale

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{L} = \text{cost.}$$

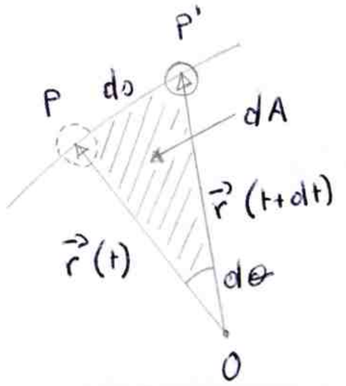
$\vec{r}$: distanza della particella dal punto fisso.

$$\vec{L} = \vec{r} \wedge m\vec{v} = \text{cost.} \Rightarrow$$

$\vec{r}$ e $\vec{v}$ stanno sempre sullo stesso piano (ortogonale ad $\vec{L}$ e passante per O)

$\Downarrow$

Traiettoria curvilinea piana



consideriamo posizioni infinitamente prossime

dA : area infinitesima spazzata dal vettore nel tempo

$$ds = r\,d\theta$$

Area triangolo: $dA = \frac{1}{2} r\,(r\,d\theta) = \frac{1}{2} r^2\,d\theta$

velocità areale $\dfrac{dA}{dt} = \dfrac{1}{2} r^2 \dfrac{d\theta}{dt}$ area spazzata nell'unità di tempo

questo perché: $\vec{v} = \vec{v}_T + \vec{v}_R$

$$L = |\vec{L}| = r\,m\,v_T = r\,m\,r\frac{d\theta}{dt} = m\,r^2\frac{d\theta}{dt}$$

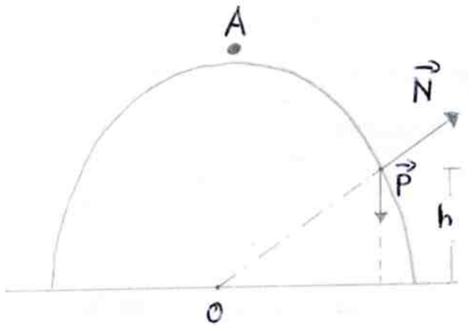
$$\vec{r} \wedge (\vec{v}_T + \vec{v}_R) = \underbrace{\vec{r} \wedge \vec{v}_T}_{r \cdot v_T} + \vec{r} \wedge \vec{v}_R$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m} = \text{cost.}$$

La velocità areale è costante

ESERCIZIO N° 33

Una sferetta pesante, partendo dal vertice A di una semisfera liscia di raggio $r = 60$ cm, scivola sul profilo della semisfera sotto l'azione del suo peso. Di quanto dovrà abbassarsi la particella prima di schizzare via dalla sfera?



posizione di equilibrio instabile

$V_0 = 0$

la sfera man mano che scende acquista velocità. Vediamo cosa succede dal punto di vista dell'energia quando il corpo scende:

siamo in presenza solo di forze conservative

$W_N = 0$

$W_{PESO} = -\Delta U$ peso

solo forze conservative $\Rightarrow E = \text{cost.}$

$E_A = E_B$

$K_A + U_A = K_B + U_B$

$V_A = 0 \Rightarrow K_A = 0$

$V_B \neq 0 \Rightarrow K_B = \frac{1}{2} m V_B^2$

per calcolare l'energia potenziale fissiamo O come punto di riferimento $\Rightarrow$

$U(0) = 0$

$R = 60$ cm

$U_A = m \cdot g \cdot R$

$U_B = m \cdot g \cdot h$

$0 + \cancel{m} g R = \frac{1}{2} \cancel{m} V_B^2 + \cancel{m} g h$

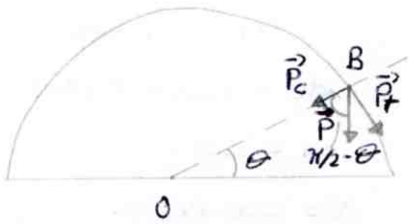
$\frac{1}{2} V_B^2 = g(R - h)$

il corpo per poter curvare è soggetto alla forza centrifuga. Quindi entra in gioco la forza centripeta

⑤

La componente radiale della $\vec{P}$ si comporta da forza centripeta.

$$F_{cons} = m\frac{V^2}{R}$$



$$P_R = P\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = P\,\text{sen}\,\theta = P\frac{h}{R}$$

man mano che il corpo scende => h diminuisce $(R\to 0)$ =>

=> P_R diminuisce => V_B aumenta => F centripeta aumenta

Il corpo schizz via quando $P_R \leq F_{centripeta}$

$$\begin{cases} E_A = E_B \\ P_R \leq F_{centripeta} \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{1}{2}V_B^2 = g(R-h) \\ \cancel{m}\,g\frac{h}{R} \leq \cancel{m}\frac{V_B^2}{R} \end{cases}$$

$$h \leq \frac{V_B^2}{g} \Rightarrow h \leq \frac{2g(R-h)}{g}$$

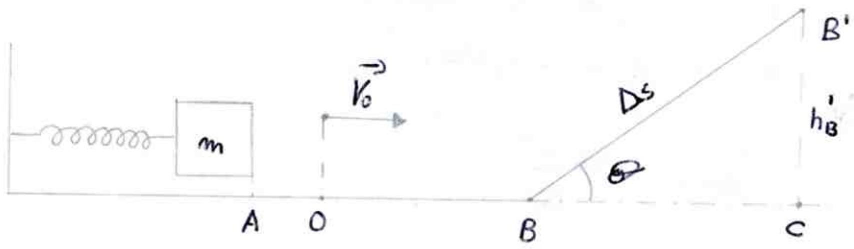
$$h \leq 2R-2h \Rightarrow 3h \leq 2R \Rightarrow h \leq 2/3\,R$$

$$h_{max} = \frac{2}{3}R$$

ESERCIZIO 35

Un corpo puntiforme di massa $m = 100$ g è appoggiato (senza essere attaccato) ad una molla ideale di costante elastica $K = 100$ N/m, compressa di 10 cm rispetto alla sua posizione di equilibrio. Corpo e molla poggiano su una guida costituita da un tratto rettilineo orizzontale privo di attrito raccordato ad un tratto rettilineo inclinato di 30° rispetto all'orizzontale e scabro ($\mu_d = 0,100$). Ad un certo istante si lascia libero il corpo. Determinare: a) La velocità con cui il corpo si stacca dalla molla; b) L'altezza massima raggiunta da un corpo sul piano inclinato; c) L'energia meccanica dissipata.

⑥



$\theta = 30°$

$\mu_d = 0,100$

$\overline{AO} = 10\ cm = |x_A|$

$m = 100\ g$

$K = 100\ N/m$

La molla compressa si lascia andare e raggiunge la sua massima elongazione. Quindi, la pallina comincia a salire sul piano inclinato scabro.

$A \to O$ $\quad F_{elastica} \to V_0$

$O \to B$ $\quad$ moto rettilineo uniforme

$V_B = V_0$

$B \to B'$ moto rettilineo uniformemente accellerato $\Rightarrow V_B' = 0$

$A \to O$ solo forze conservative

$E_A = E_O$

$K_A + U_A = K_O + U_O$

$U_A = \frac{1}{2} K x_A^2 + m g h_A$

$K_A = 0$

$K_O = \frac{1}{2} m V_0^2$

$U_O = 0 + m \cdot g\, h_O$ (perché la molla non è più compressa.

Finiamo la quota di o come riferimento $\Rightarrow U(h_O) = 0$

$\frac{1}{2} K_A^2 = \frac{1}{2} m V_0^2$

$V_0 = |x_A| \sqrt{\frac{k}{m}}$

Attrato $\Rightarrow \Delta E \neq 0$

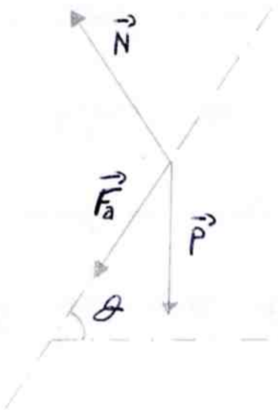
$\Delta E = W_{NC}$

$W_{att.} = E_{B'} - E_B$

$$E_{B'} = K_{B'} + U_{B'} = \frac{1}{2} m \underset{\substack{\Downarrow \\ 0}}{\cancel{V_{B'}^{2}}} + m g h_{B'} = m g h_{B'}$$

$$E_B = K_B + U_B = \frac{1}{2} m \underset{\substack{\Downarrow \\ V_0}}{V_B^{2}} + m g \underset{\substack{\Downarrow \\ 0}}{h_B} = \frac{1}{2} m V_0^{2}$$

$$W_{attr.} = \vec{F}_{attr.} \cdot \vec{\Delta s} \qquad (\vec{F}_{attr.} = \text{cost.})$$



$$F_a = \mu_d \cdot N$$

$$\vec{N} + \vec{P} + \vec{F_d} = m \cdot \vec{a}$$

$$\begin{cases} N - P \cos\theta = 0 \\ -P \,\text{sen}\,\theta - F_d = m \cdot a \end{cases}$$

$$N = m g \cos\theta$$

$$W_{attr.} = F_d \,\Delta s \cos(\pi) = -\mu_d m g \cos\theta \,\Delta s$$

$$-\mu_d \cancel{m} g \cos\theta \,\Delta s = \cancel{m} g h_{B'} - \frac{1}{2} \cancel{m} V_0^{2}$$

$$-\mu_d \cdot g \cos\theta \frac{h_{B'}}{\text{sen}\,\theta} = g h_{B'} - \frac{1}{2} m V_0^{2}$$

$$h_{B'} g \left(1 + \mu_d \frac{\cos\theta}{\text{sen}\,\theta}\right) = \frac{1}{2} V_0^{2}$$

Calcolo dell'energia massima dissipata:

$E_{dissipata}$

$$E_B > E_{B'}$$

$$E_{B'} - E_B < 0$$

$$E_{B'} - E_B = W_{attr.} = -\mu_d m g h_{B'} \frac{\cos\theta}{\text{sen}\,\theta}$$

$$E_{dissipata} = |\Delta E| = |W_{attr.}|$$

$$|\Delta E| = \left| m \cdot g h_{B'} - \frac{1}{2} m V_0^{2} \right| \Rightarrow |W_{attr.}| = \mu_d m g \cos\theta \frac{h_{B'}}{\text{sen}\,\theta}$$

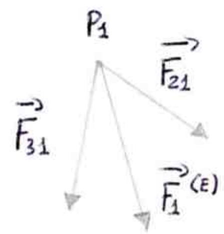
SISTEMI DI PUNTI MATERIALI

Sappiamo che un corpo, lanciato verso l'alto con un'inclinazione descrive una traiettoria parabolica.

Viene fatto l'esempio della ballerina che non si muove rispetto ad un sistema, ma al tempo stesso effettua dei movimenti. Siamo quindi in una situazione differente rispetto ad una pallina che, lanciata, si muove in moto circolare. Fra questi due esempi sappiamo che tutti e due agiscono su un sistema di punti materiali, ma sappiamo che la ballerina compie altri movimenti muovendo gli arti.

Da questo è utile descrivere:

DINAMICA DEI SISTEMI DI PUNTI MATERIALI

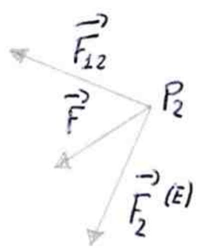


Per la i-esima particella:

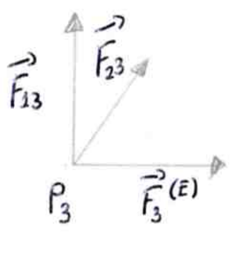
$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{(E)} + \vec{F}_i^{(I)}$$

$\vec{F}_i^{(E)}$ = forze esterne

$\vec{F}_i^{(I)}$ = forze interne $\Big\{$ esercitate dalle rimanenti $n-1$ particelle



N.B.: la distinzione tra forze interne e forze esterne dipende da come viene da come viene definito il sistema di punti.



In generale: $\vec{F}_i^{(I)} \neq 0$ risultante delle forze intere agenti sul punto i-esimo

ma $\vec{F}_{TOT}^{(I)} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = F_1^{(I)} + F_2^{(I)} + F_3^{(I)}$

essendo: $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$ (3ª legge del moto)

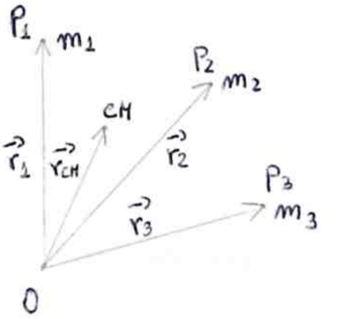
⑨ Esempio: $\vec{F}_{TOT}^{(I)} = (\vec{F}_{21} + \vec{F}_{31}) + (\vec{F}_{12} + \vec{F}_{32}) + (\vec{F}_{23} + \vec{F}_{13}) =$

$$= \vec{F}_{21} + \vec{F}_{31} + (-\vec{F}_{21}) + \vec{F}_{32} + (-\vec{F}_{32}) + (-\vec{F}_{31}) = 0$$

SISTEMA DI PUNTI MATERIALI

Viene fatto l'esempio di una pallina lanciata in aria: ne scaturisce un moto parabolico. In un altro esempio cerchiamo di effettuare lo stesso lancio con un'ascia. Ci accorgiamo che quest'ultima, nel suo moto parabolico, esercita un altro movimento di rotazione mentre è in aria. In realtà anche la pallina nella sua traiettoria ruota su se stessa, ma è meno apparente per un effetto visivo. Quindi è utile rilevare un fattore importante come il centro di massa, utile per migliorare gli studi sui punti materiali.

Dato un sistema di punti materiali:



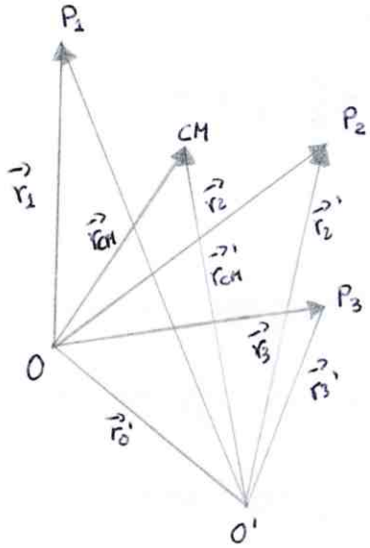
CENTRO DI MASSA: punto geometrico la cui posizione viene individuata da:

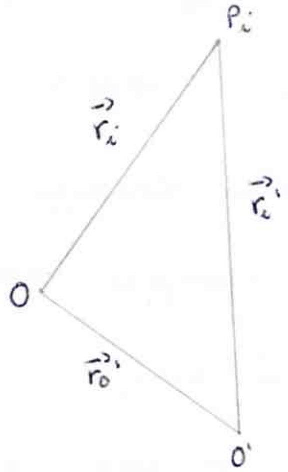
$$\vec{r}_{CM} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + \dots + m_n \vec{r}_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \cdot \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}$$

ove $\sum_i m_i = M$ MASSA TOTALE

$$x_{CM} = \frac{\sum_i m_i x_i}{M} \; ; \quad y_{CM} = \frac{\sum_i m_i y_i}{M} \; ; \quad z_{CM} = \frac{\sum_i m_i z_i}{M} \; ;$$

N.B.: la posizione del centro di massa non dipende dal sistema di riferimento.





$$\vec r_i = \vec r_0\,' + \vec r_i\,'$$

$$\vec r_i = \vec r_0\,' + \vec r\,'$$

$$\vec r\,' = \vec r_i - \vec r_0\,'$$

$$\vec r\,'_{CM} = \frac{\sum_i m_i \vec r_i\,'}{M} = \frac{\sum_i m_i (\vec r_i - \vec r_0)}{M} = \frac{\sum_i m_i \vec r_i - \vec r_0\,' \sum_i m_i}{M} = \frac{\sum_i m_i \vec r_i}{M} - \vec r_0\,' = \vec r_{CM} - \vec r_0\,'$$

$$\vec r_{CM} = \frac{\sum_i m_i \vec r_i}{M}$$

$$\vec v_{CM} = \frac{d\vec r_{CM}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\sum_i m_i \vec r_i}{\sum_i m_i}\right) = \frac{\sum_i m_i \frac{d\vec r_i}{dt}}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \vec v_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i \vec P_i}{\sum_i m_i} = \frac{\vec P_{TOT}}{M}$$

$$\vec P_{TOT} = M \cdot \vec v_{CM}$$

$\vec P_{TOT}$ coincide con la quantita' di moto $M\vec v_{CM}$ di un punto materiale di massa M, che si trova alla posizione $\vec r_{CM}$ e si muove con velocita' $\vec v_{CM}$

$$\vec a_{CM} = \frac{d\vec v_{CM}}{dt} = \frac{\sum m_i \frac{d\vec v_i}{dt}}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i \vec a_i}{\sum m_i}$$

$$\sum m_i \vec a_i = \sum\left(\vec F_i^{(I)} + \vec F_i^{(E)}\right) = \sum \vec F_i^{(I)} + \sum \vec F_i^{(E)} = \vec F_{TOT}^{(E)} = M \cdot \vec a_{CM}$$

Il centro di massa si muove come un punto materiale in cui sta concentrata tutta la massa del sistema e a cui sia applicata la risultante delle forze esterne.

Il moto di CM dipende solo dalle forze esterne.